$$-\frac{3g}{4L}\sin\theta\cos\theta + w^2\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta \cdot w^2 = \frac{3g}{4L}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$\cos\theta\cdot\left(\frac{3g}{2L}\right)\cdot(\sin\theta_0 - \sin\theta) = \frac{3g}{4L}\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin\theta_0 - \sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{2}{3}\sin\theta_0 \qquad \theta = \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right)$$

离开墙壁.

阻尼振动

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma m\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx + m\gamma\dot{x} = 0 \qquad \text{拟解 } x = Ae^{\alpha t}$$

$$\ddot{x} + w_0^2 x + \gamma\dot{x} = 0$$

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + w_0^2 Ae^{\alpha t} + \gamma A\alpha e^{\alpha t} = 0 \qquad Ae^{\alpha t} \neq 0$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha^2 + \gamma\alpha + w_0^2 = 0$$

$$\alpha_\pm = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4w_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - w_0^2}$$

通解为 $\quad x(t) = Ae^{\alpha_+ t} + Be^{\alpha_- t}$

根据 $\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2$ 的情况，就可以把阻尼振动分为三类

① 过阻尼振动 (over damping)

$\frac{\gamma^2}{4}>\omega_0^2$ $\quad \gamma>2\omega_0$

$\alpha_\pm$ 均小于0 且为实数，$x(t)$ 也为实数

$A^*=A$, $B^*=B$，A, B也为实数.

考虑当 $\gamma\gg\omega_0$

$$\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2} \sim \frac{\gamma}{2}\left(1-\left(\frac{2\omega_0}{\gamma}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\omega_0}{\gamma}\to 0$$

$$\sim \frac{\gamma}{2}\left(1-\frac{4\omega_0^2}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sim \frac{\gamma}{2}-\frac{2\omega_0^2}{\gamma}$$

$$\alpha_+ = -\frac{2\omega_0^2}{\gamma} \qquad |\alpha_-|>|\alpha_+| \text{ t 较大时}$$

$$x(t)\sim Ae^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma}t} \text{ 为递减 } >0$$

不仅无法振动，连回到平衡位置都不行了

② 欠阻尼振动 (light damping)

$\frac{\gamma^2}{4}<\omega_0^2$ 时 为复根

$$\alpha_+ = -\frac{\gamma}{2} + i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \qquad 令 \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \omega'$$

$$\alpha_- = -\frac{\gamma}{2} - i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \qquad \alpha_+^* = \alpha_-^*$$

$$x(t) = A e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega')t} + B e^{(-\frac{\gamma}{2} - i\omega')t}$$

$$x^*(t) = A^* e^{(-\frac{\gamma}{2} - i\omega')t} + B^* e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega')t}.$$

$$A = B^* \qquad B^* = A$$

$$令 \quad A = |A| e^{i\Phi} \qquad B = |A| e^{-i\Phi}$$

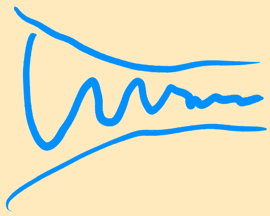
$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(|A| e^{i\Phi + (i\omega')t} + |A| e^{-i\Phi - (i\omega')t}\right)$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(2|A| \cos(\omega' t + \Phi)\right)$$

$$= A' e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega' t + \Phi)$$

做振幅不断减小的简谐运动



③临界阻尼振动 (critical damping)

$$\frac{\gamma^2}{4}=\omega_0^2 \qquad \alpha_2=\alpha=-\frac{\gamma}{2}$$

$$x(t)=(A+B)e^{-\frac{\gamma}{2}t}=A'e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

而 $x(t)$ 理应是由两个解得出的（两个基）.

另外一个为 $B'te^{-\frac{\gamma}{2}t}$

$$x(t)=[A'+B't]e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

阶数更高了 衰减得也更快了，几乎以最快的速度趋向于衡位置，然后待着不动了，也不再振荡了.

受迫振动

在有动力，阻尼力的情况下，再加上外界给予的驱动力

$F_0\cos\omega t$.

有 $m\ddot{x}+\gamma m\dot{x}+kx=F_0\cos\omega t$

令 $x(t)$ 为其解 $y(t)$ 为方程

$m\ddot{y}+\gamma m\dot{y}+ky=F_0\sin\omega t$ 的解

则 $m(\ddot{x}+i\ddot{y})+\gamma m(\dot{x}+i\dot{y})+k(x+iy)=F_0(\cos\omega t+i\sin\omega t)$

令 $z = x + iy$.

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + kz = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$ 解的实部为方程的解.

拟设 $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$

$$[-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2] z_0 e^{i\omega t} = \frac{F}{m} e^{i\omega t}$$

$$z_0 = \frac{F_0/m}{[-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2]} = Z(\omega).$$

则 $$z(t) = \frac{[F_0/m]\, e^{i\omega t}}{Z(\omega)} = \frac{[F_0/m]\, e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma} = \frac{[F_0/m]\, e^{i\omega t}}{|Z|\, e^{i\Phi}}.$$

$$|Z| = \sqrt{[\omega_0^2 - \omega^2]^2 + \omega^2\gamma^2} \qquad \Phi = \arctan\left[\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]$$

故 $$z(t) = \frac{F_0}{m|Z|} e^{i(\omega t - \phi)} = \frac{F_0}{m|Z|} \cos(\omega t - \Phi)$$

它造成了一个振幅的减小，变为原来的商

也造成了相位的移动

对于 $|Z| = \sqrt{[\omega_0^2 - \omega^2]^2 + \omega^2\gamma^2}$.

(1) 阻尼力 $w=0$.

$|z|=w_0^2$ 初始位置 $\frac{F_0}{m\cdot w_0^2}=\frac{F_0}{k}$.

即把弹簧拉到与 F_0 平衡的位置

② 若 $w=w_0$, 则为最小, 为共振.

响应得最好

那么, 这里的自由参数在哪里呢.

回忆线性方程组中

$Ax=0$ 前面的我们都是这种情况 ($m\ddot{x}+\gamma m\dot{x}+kx=0$)

和

$Ax=b$ —— ①

我们知道 ① 的解空间形式为 特解 + 通解

$Ax=0$ 的解

在这里,我们也理应自然想到

$m\ddot{x}+\gamma m\dot{x}+kx=0$ 作为其通解并与

其相加

故受迫振动最一般的解为

$$x(t)=\frac{F_0}{m|Z|}\cos(\omega t-\Phi)+e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\left[Ae^{i\omega' t}+Be^{-i\omega' t}\right]$$

$$\omega'=\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}$$

$$=\underbrace{\frac{F_0}{m|Z|}\cos(\omega t-\Phi)}_{\text{steady state solution}}+\underbrace{2|A|e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\cos(\omega' t+\varphi)}_{\text{Transient solution}}$$

$\omega<\omega_0$ 同相

$\omega>\omega_0$ 反相 (out of phase) π

$\omega=\omega_0$ 亏相位